微分の応用《基本演習》　(NO.2)　解答 1枚目

1. 次のことを証明せよ．ただし，n は自然数とする．

$y=\log(x+1)$ のとき　$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$

(解)

$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}\cdots\cdots①$

(1)　$n=1$ のとき

$y'=\dfrac{1}{x+1}$　　$\therefore y^{(1)}=(-1)^{1-1}\dfrac{(1-1)!}{(x+1)^1}$

よって　$n=1$ のとき　① は成り立つ．

(2)　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(x+1)^k}$

$\therefore y^{(k)}=(-1)^{k-1}\,(k-1)!\,(x+1)^{-k}$

$n=k+1$ のときを考える

$y^{(k+1)}=(-1)^{k-1}\,(k-1)!\,(-k)(x+1)^{-k-1}$

$=(-1)^{k-1}(-1)\,k(k-1)!\,(x+1)^{-(k+1)}$

$=(-1)^k\,k!\,\dfrac{1}{(x+1)^{k+1}}$

$\therefore y^{(k+1)}=(-1)^{(k+1)-1}\dfrac{\{(k+1)-1\}!}{(x+1)^{k+1}}$

よって　$n=k+1$ のとき　① は成り立つ．

したがって，(1),(2) から数学的帰納法によって

すべての自然数 n について ① は成り立つ．

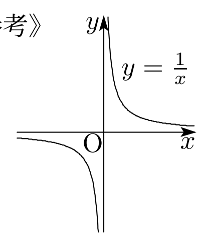
2. 関数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ について，次の問いに答えよ．

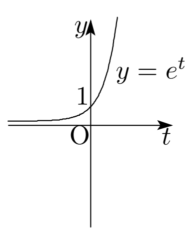
(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)$，　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を求めよ．

(2)　漸近線を求めよ．

(3)　$y=f(x)$ の増減・凹凸を調べ，グラフをかけ．

(解)《参考》





(1)　$x\to-0$ のとき，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$　　$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，

$t\to-\infty$,　　$e^t\to0$,　　$e^{\frac{1}{x}}\to0$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}xe^{\frac{1}{x}}=0$　〃

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$　〃

(2)　漸近線を $y=ax+b$ とすると

$\displaystyle a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

$\displaystyle b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(1\cdot x))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

よって $y=f(x)$ の漸近線は　$y=x+1$　〃

(1) より $\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\infty$　$\therefore y$ 軸も漸近線である．〃

(3)　$y'=1\cdot e^{\frac{1}{x}}+x\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\dfrac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$

また，$y'=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$ と表されるから

$y''=-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

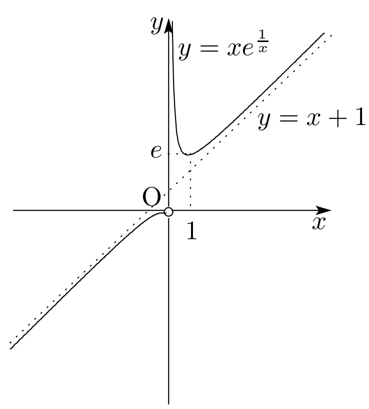
$x<0$ のとき上に凸，$x>0$ のとき下に凸　〃

増減表は次のようになる．

x	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$
y'	$+$	/	$-$	0	$+$
y''	$-$	/	$+$	e	$+$
y	↗	/	↘	e	↗

極小値は e($x=1$ のとき)

グラフは図のようになる．



微分の応用《基本演習》 (NO.2) 解答 2枚目

3. 関数 $f(x) = (1+\cos x)\sin x \ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$
の極値を求め，グラフの概形をかけ．

(解)

$y = f(x) = (1+\cos x)\sin x$ とおくと，

$y' = (1+\cos x)'\sin x + (1+\cos x)(\sin x)'$

$= -\sin x \sin x + (1+\cos x)\cos x$

$= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$

$= -(1-\cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

$= (2\cos -1)(\cos x + 1)$

$y' = 0$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より

$\cos x = \dfrac{1}{2},\ \cos x = -1 \qquad \therefore x = \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3}$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$y = \left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \pi$ のとき，$y = (1+\cos\pi)\sin\pi = 0$

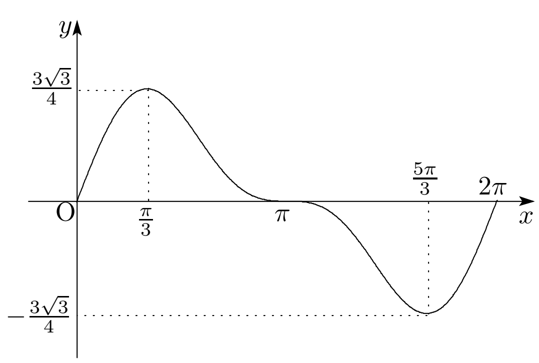
$x = \dfrac{5\pi}{3}$ のとき，

$y = \left(1+\cos\dfrac{5\pi}{3}\right)\sin\dfrac{5\pi}{3}$

$= \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\ldots$	$\frac{\pi}{3}$	$\ldots$	π	$\ldots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\ldots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0
			極大				極小		

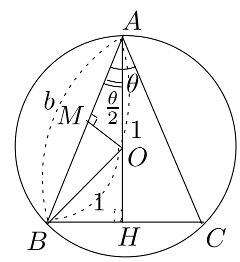


4. 半径 1 の円に内接する二等辺三角形について，
次の問いに答えよ．

(1) 三角形の面積 S を頂角 θ の式で表せ．

(2) S が最大となるときの θ の値を求めよ．
また，S の最大値を求めよ．

(解)



(1) 円の中心を O とし，

$\triangle ABC$ の等辺を $AB = AC = b$ とする．

直線 AO と線分 BC の交点を H とし，

線分 AB の中点を M とする．

$\angle BAC = \theta$ より，$\angle BAH = \dfrac{\theta}{2}$

$\triangle ABH = \dfrac{1}{2}\cdot BH \cdot AH$

$= \dfrac{1}{2}\cdot b\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot b\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot b^2 \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}b^2 \cdot 2 \cdot \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore S = \dfrac{1}{2}b^2 \sin\theta \cdots\cdots$ ①

$OA = OB = 1$ より，$\angle OMA$ は直角だから，

$AM = AO \cdot \cos\dfrac{\theta}{2} = 1 \cdot \cos\dfrac{\theta}{2}$

$b = AB = 2 \cdot AM = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$

これを ① に代入して，

$S = \dfrac{1}{2}\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2 \sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

半角の公式 $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$ を用いて，

$2\cos^2\dfrac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$

$\therefore S = \sin\theta(1+\cos\theta) \qquad (0 < \theta < \pi)$ 〃

(2) $S = \sin\theta(1+\cos\theta)$

$S' = \dfrac{dS}{d\theta} = \cos\theta(1+\cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta)$

$S' = \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1$

$= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$

$S' = 0$ とおくと，

$0 < \theta < \pi$ より，$\cos\theta + 1 > 0$ だから，

$\cos\theta = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

このとき，

$S = \sin\dfrac{\pi}{3}\left(1 + \cos\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

よって，増減表は次のようになる．

θ	0	$\ldots$	$\frac{\pi}{3}$	$\ldots$	π
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

よって，増減表より

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき S は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる． 〃